Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления
Кафедра теории управления

Волошин Михаил Витальевич

Магистерская диссертация

Исследование асимптотического поведения решений нелинейных разностных систем

Направление 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика»
Магистерская программа
«Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Александров А. Ю.

Рецензент,
кандидат технич. наук,
доцент Крупенина Н. В.

Санкт-Петербург
2017

Оглавление

Введение

Разностные уравнения широко используются для описания систем, состояния которых изменяются в дискретные моменты времени [1–5]. Кроме того, во многих случаях при рассмотрении непрерывных математических моделей допускается их приближенная замена дискретными [1–3, 6]. К примеру, многие численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) представляют собой способы сведения дифференциальных уравнений к разностным [1, 7, 8].

В приложениях разностных и дифференциальных уравнений часто возникает задача исследования устойчивости их решений. При этом в случаях устойчивых решений важной практической задачей является оценка области их притяжения. Особый интерес представляет ситуация, когда устойчивость носит глобальный характер, то есть, когда областью притяжения решения является все пространство параметров.

В настоящей работе исследуется проблема глобальной устойчивости решений одного класса нелинейных систем с переключениями. Предполагается, что нелинейности удовлетворяют ограничениям секторного типа. Система с переключениями представляет собой гибридную систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени какая из подсистем является активной. Системы такого вида появляются при моделировании многих реальных процессов [9–13].

Известно, что из устойчивости каждой используемой подсистемы в общем случае не следует устойчивость гибридной системы. Для того чтобы доказать устойчивость системы с переключениями, достаточно построить общую функцию Ляпунова для каждой подсистемы, соответствующей рассматриваемой системе. Однако проблема существования такой функции не полностью решена даже для семейства линейных автономных подсистем.

В тех случаях, когда общую функцию Ляпунова построить не удается, обеспечить асимптотическую устойчивость можно путем наложения специальных дополнительных ограничений на закон переключения (dwell-time approach [10, 14–18]). Для некоторых типов гибридных систем доказано, что асимптотическая устойчивость будет сохраняться, если промежутки времени между последовательными переключениями достаточно велики. Однако такой подход хорошо развит только для семейства экспоненциально устойчивых подсистем. В данной работе указанный подход применяется для одного класса существенно нелинейных подсистем. При этом обеспечивается глобальный характер асимптотической устойчивости.

Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{M} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество моментов времени, $n \in \mathbb{N}$ – количество переменных состояния системы, $I = \{1, \dots, n\}$, $N \in \mathbb{N}$ – количество подсистем, $Q = \{1, \dots, N\}$. Рассмотрим нелинейную разностную систему с переключениями

$$\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k) = h\boldsymbol{P}_{\sigma(k)}\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k)\big). \qquad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)\big)^T$, скалярные функции $f_i(x_i)$ определены и непрерывны при $x_i \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют ограничениям секторного типа $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i \in I$; $\sigma(k)$: $\mathbb{M} \to Q$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключения, $\boldsymbol{P}_s$: $Q \to \mathbb{R}^{n \times n}$ – постоянные матрицы, $h > 0$ – шаг дискретизации. Таким образом, в каждый момент времени работа исследуемой системы описывается одной из подсистем

$$\boldsymbol{x}(k+1) - \boldsymbol{x}(k) = h\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(k)\big), \qquad s \in Q. \qquad (2)$$

Рассмотрим соответствующие подсистемам (2) системы ОДУ

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}_s\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad s \in Q. \qquad (3)$$

Системы вида (2) и (3) широко применяются при изучении систем автоматического регулирования [4, 19, 20]. Они также используются при моделировании нейронных сетей [21].

Из свойств функций $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ следует, что системы (1)–(3) имеют нулевые решения.

Основная задача данной работы заключаются в выявлении достаточных условий для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения системы (1).

Обзор литературы

Многие понятия и методы, относящиеся к устойчивости решений разностных уравнений, имеют аналоги в теории ОДУ.

Наиболее универсальным методом качественного анализа нелинейных систем ОДУ является второй (прямой) метод Ляпунова [22]. Он распространен на задачи анализа разнообразных динамических свойств решений ОДУ [22–25], доказан ряд теорем о различных типах ограниченности движений. Для нелинейных разностных систем наиболее общим методом качественного анализа является дискретный аналог второго метода Ляпунова [2, с. 27–30].

В работе [26] получены достаточные условия, при выполнении которых для семейства систем вида (3) существует общая функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При этом рассмотрено несколько возможных вариантов построения такой функции Ляпунова.

В работе [27] исследовалась устойчивость решений одного класса разностных систем с переключениями и нелинейностями секторного типа. Предложены способы построения общей функции Ляпунова для семейства подсистем вида (2), обеспечивающие устойчивость при любом законе переключения, и условия на закон переключения, если общую функцию Ляпунова построить не удается.

В настоящей работе для других классов систем в окрестности начала координат получены оценки решений, похожие на известные. При этом основной задачей работы является получение условий, обеспечивающих глобальную асимптотическую устойчивость.

Глава 1. Основные обозначения и предположения

Выберем для дальнейшего использования стандартную евклидову норму в пространстве n-мерных вещественных векторов $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $\Theta_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{M}$ все моменты переключений между подсистемами, то есть все такие числа Θ_i, что $\sigma(\Theta_i - 1) \neq \sigma(\Theta_i)$, $0 < \Theta_1 < \Theta_2 <\ldots$ Будем считать, что эти моменты известны, а порядок, в котором происходит смена режимов функционирования гибридной системы, нет. Пусть $\Theta_0 = 0$. Будем рассматривать только такие законы переключения, для которых функция $\sigma(k)$ имеет бесконечное количество переключений. Обозначим длины промежутков между переключениями $T_i = \Theta_i - \Theta_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что гарантировать существование общей функции Ляпунова для систем (3) не удается. Тогда обеспечить асимптотическую устойчивость можно за счет наложения ограничений на закон переключения (dwell-time approach).

Далее в настоящей работе наложим на правые части уравнений (2) некоторые дополнительные ограничения.

1.1. Диагональная устойчивость

Предположение 1. Пусть для каждого значения индекса $s \in Q$ существуют положительные числа $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$, при которых матрица $\boldsymbol{P}_s^T \boldsymbol{\Lambda}_s + \boldsymbol{\Lambda}_s \boldsymbol{P}_s$ отрицательно определена. Здесь $\boldsymbol{\Lambda}_s = \mathbf{diag}\left(\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}\right)$.

Условия существования таких значений $\lambda_1^{(s)}, \ldots, \lambda_n^{(s)}$ исследовались в работах [5, 26, 28, 29].

Если выполнено предположение 1, то для каждого $s \in Q$ нулевое решение s-ой подсистемы из (3) асимптотически устойчиво при любых допустимых функциях $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$, причем для этой подсистемы функция

$$V_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau$$

удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если бы требуемые значения $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}$ удалось подобрать одинаковыми для всех $s \in Q$, то это бы означало, что для подсистем (3) получилось построить общую функцию Ляпунова. Однако, условия существования такой общей функции Ляпунова являются гораздо более жесткими, нежели условия существования своей частной функции Ляпунова для каждой отдельной подсистемы.

Положим

$$c = \max\left\{ \frac{\lambda_i^{(s_1)}}{\lambda_i^{(s_2)}} \,\middle|\, i \in I,\ \ s_1, s_2 \in Q \right\}.$$

Тогда $c \geq 1$, и для любых $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$V_{s_1}(\boldsymbol{x}) \leq cV_{s_2}(\boldsymbol{x}), \qquad s_1, s_2 \in Q.$$

Если $c = 1$, то $V_1(\boldsymbol{x}) \equiv \ldots \equiv V_N(\boldsymbol{x})$, то есть для подсистем (3) построена общая функция Ляпунова. Далее считаем, что $c > 1$.

По предположению 1 нулевые решения подсистем (3) асимптотически устойчивы, причем производная функции $V_s(\boldsymbol{x})$ в силу s-ой подсистемы из (3) при соответствующем выборе коэффициентов $\lambda_1^{(s)}, \dots, \lambda_n^{(s)}$ отрицательно определена, $s \in Q$. Тогда существует такое число $\alpha_1 > 0$, что при $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ указанные производные удовлетворяют соотношениям

$$\dot{V}_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} f_i(x_i) \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j(x_j) = \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\Lambda}_s \boldsymbol{P}_s \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq -\alpha_1 \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x}), \qquad s \in Q.$$

Здесь и далее в работе для скалярных квадратов векторов $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ используются следующие обозначения:

$$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

1.2. Условие Липшица

Предположение 2. Пусть функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условию Липшица на всей вещественной оси, то есть существует число $L > 0$, при котором для всех $x_i', x_i'' \in \mathbb{R}$

$$|f_i(x_i') - f_i(x_i'')| \le L|x_i' - x_i''|, \qquad i \in I.$$

Оценим приращение функции $V_s(\boldsymbol{x})$ в силу подсистемы s для всех $s \in Q$:

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int\limits_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} f_i(\tau)\, d\tau =$$

$$= h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} f_i\big(x_i(k) + \xi_i(k)\Delta x_i(k)\big) \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j\left(x_j(k)\right) =$$

$$= h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} f_i\big(x_i(k)\big) \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j\left(x_j(k)\right) +$$

$$+h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \left(f_i\big(x_i(k) + \xi_i(k)\Delta x_i(k)\big) - f_i\big(x_i(k)\big)\right) \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(s)} f_j\left(x_j(k)\right) \le$$

$$\le -\alpha_1 h \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big) + h^2 L \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \left(\sum_{m=1}^{n} \left|p_{im}^{(s)} f_m\big(x_m(k)\big)\right|\right) \sum_{j=1}^{n} \left|p_{ij}^{(s)} f_j\left(x_j(k)\right)\right| \le$$

$$\le -(\alpha_1 - hL\alpha_2) h \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big).$$

Здесь $\Delta x_i(k) = x_i(k+1) - x_i(k)$, $\xi_i(k) \in (0,1)$, $i \in I$, $k \in \mathbb{M}$, $\alpha_2 > 0$. Таким образом, если $h_0 = \frac{\alpha_1}{L\alpha_2}$, то при $h \in (0, h_0)$ имеем

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\alpha_3 \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big),$$

где $\alpha_3 = (\alpha_1 - hL\alpha_2)h > 0$.

Далее будем рассматривать систему (1) с выбранным шагом $h \in (0, h_0)$.

Глава 2. Системы с линейными оценками

В данной главе используем следующее дополнительное предположение о правых частях уравнений (2).

2.1. Предположение

Предположение 3. Пусть существуют положительные числа $\bar{\beta}_i$, $\bar{\xi}_i$ и β_i, при которых функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют условиям

$$\bar{\beta}_i |x_i|^{\bar{\xi}_i} \le \int_0^{x_i} f_i(\tau)\,d\tau \le \beta_i f_i^2(x_i), \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i \in I.$$

В частности, предположение 3 будет выполнено, если функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают при $x_i \in \mathbb{R}$, и существуют числа $\gamma_i > 0$, при которых функции $f_i(x_i)$ удовлетворяют линейным оценкам

$$|f_i(x_i)| \ge \gamma_i |x_i|, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i \in I.$$

Тогда

$$\frac{\gamma_i x_i^2}{2} \le \int_0^{x_i} f_i(\tau)\,d\tau \le f_i(x_i)x_i \le \frac{f_i^2(x_i)}{\gamma_i}.$$

2.2. Оценки

При выполнении предположения 3 найдутся числа $\alpha_4 > \alpha_3$ и $\alpha_5 > 0$, при которых при всех $s \in Q$ и $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется

$$V_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)\,d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \beta_i f_i^2(x_i) \le \alpha_4 \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x}) \le \alpha_5 \boldsymbol{x}^2.$$

Введем обозначения

$$G_1 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \ |x_1| \le 1, \ \ \ldots, \ \ |x_n| \le 1\},$$

$$\bar{\xi}_{max} = \max\{\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n\}, \qquad a = 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \in (0,1).$$

Тогда найдутся положительные числа α_6, α_7 и α_8, при которых при всех $s \in Q$ и $\boldsymbol{x} \in G_1$ справедливы оценки

$$V_s(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_6 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\bar{\bar{\xi}}_i} \geq \alpha_7 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\bar{\bar{\xi}}_{max}} \geq \alpha_8 \|\boldsymbol{x}\|^{\bar{\bar{\xi}}_{max}}.$$

Оценим приращение функции $V_s(\boldsymbol{x})$ на решениях $\boldsymbol{x}(k)$ подсистемы s из (2) для всех $s \in Q$:

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \leq -\alpha_3 \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \leq -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big),$$

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) \leq a V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big).$$

2.3. Результаты

Введем при $p, m \in \mathbb{N}$ обозначение

$$\chi(m,p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i}.$$

Если верхний предел знака суммирования меньше нижнего, будем считать в данной работе такие суммы равными нулю.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3, и $\chi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $h \in (0, h_0)$.

Доказательство. Используя известные частные функции Ляпунова $V_1(\boldsymbol{x})$, …, $V_N(\boldsymbol{x})$ для подсистем (3) построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(k)}(\boldsymbol{x})$ для системы (1), соответствующую закону переключения $\sigma(k)$.

Выберем начальный момент времени $k_0 \in \mathbb{M}$ и начальную точку $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(k)$ системы (1), выходящее при $k = k_0$ из точки $\boldsymbol{x}_0$. Найдем такое натуральное число $m \in \mathbb{N}$, что $k_0 \in [\Theta_{m-1}, \Theta_m)$.

На промежутке $k \in [k_0, \Theta_m)$ справедливы оценки

$$V_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \leq a^{k-k_0} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0).$$

Для каждого $k \geq \Theta_m$ можно указать такое натуральное число $p \in \mathbb{N}$, что $\Theta_{m+p-1} \leq k < \Theta_{m+p}$. При этом $p \to \infty$, когда $k \to \infty$. Рассмотрим решение

$\boldsymbol{x}(k)$ в течение некоторого промежутка времени $[k_0, k]$. Последовательно производя оценки на промежутках $[\Theta_{m+K-1}, k]$, $[\Theta_{m+K-2}, \Theta_{m+K-1}]$, …, $[k_0, \Theta_m]$, имеем

$$V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le a^{k-\Theta_{m+p-1}} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\Theta_{m+p-1}\big) \le$$
$$\le c a^{k-\Theta_{m+p-1}} V_{\sigma(\Theta_{m+p-2})}\big(\Theta_{m+p-1}\big) \le \dots \le c^p a^{k-k_0} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0) \le$$
$$\le \alpha_5 a^{k-k_0+p\log_a c} \boldsymbol{x}_0^2.$$

При этом

$$\log_a c < 0,$$
$$k - k_0 + p\log_a c = k - \Theta_{m+p-1} + p(\chi(m,p) + \log_a c) + \Theta_m - k_0.$$

По условию, $\chi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при всех $k_0 \in \mathbb{M}$, $k \ge k_0$ и $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ будет выполнено $\|\boldsymbol{x}(k)\| < \varepsilon$, и $\|\boldsymbol{x}(k)\| \to 0$ при $k - k_0 \to +\infty$ равномерно по $k_0 \in \mathbb{M}$ и $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$. Таким образом, нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, и для всех $k_0 \in \mathbb{M}$ областью притяжения нулевого решения является все пространство $\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

Глава 3. Системы со степенными оценками

В данной главе вместо предположения 3 из главы 2 используем другое предположение о правых частях уравнений (2).

3.1. Предположение

Предположение 4. Пусть существуют положительные числа $\bar{\beta}_i, \bar{\xi}_i$, β_i, $\xi_i < 2$, H_i и $\hat{\beta}_i$, при которых функции $f_i(x_i)$ при $i \in I$ удовлетворяют условиям

$$\bar{\beta}_i |x_i|^{\bar{\xi}_i} \le \int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \beta_i |f_i(x_i)|^{\xi_i}, \qquad |x_i| \le H_i,$$

$$\int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \hat{\beta}_i f_i^2(x_i), \qquad |x_i| > H_i.$$

В частности, предположение 4 будет выполнено, если при $i \in I$ функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают, и существуют такие положительные числа H_i, γ_i, $\hat{\gamma}_i$ и $\sigma_i > 1$, что выполнены оценки

$$|f_i(x_i)| \ge \gamma_i |x_i|^{\sigma_i}, \qquad |x_i| \le H_i,$$

$$|f_i(x_i)| \ge \hat{\gamma}_i |x_i|, \qquad |x_i| > H_i.$$

Тогда при $i \in I$ справедливо

$$\frac{\gamma_i}{1+\sigma_i} |x_i|^{1+\sigma_i} \le \int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \frac{|f_i(x_i)|^{1+\frac{1}{\sigma_i}}}{\gamma_i^{\frac{1}{\sigma_i}}}, \qquad |x_i| \le H_i,$$

$$\int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \frac{f_i^2(x_i)}{\hat{\gamma}_i}, \qquad |x_i| > H_i.$$

3.2. Оценки в окрестности начала координат

Обозначим

$$G_1 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \ |x_1| \le H_1,\ \ \dots,\ \ |x_n| \le H_n\},$$

$$\bar{\xi}_{max} = \max\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n\}, \qquad \xi_{min} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

При выполнении предположения 4 найдутся такие положительные α_4, α_5, α_6, α_7, α_8 и α_9, что при всех $\boldsymbol{x} \in G_1$ и $s \in Q$ выполняется

$$V_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \beta_i |f_i(x_i)|^{\xi_i} \le$$

$$\le \alpha_4 \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_i)|^{\xi_{min}} \le \alpha_5 \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^{\xi_{min}} \le \alpha_6 \|\boldsymbol{x}\|^{\xi_{min}},$$

$$V_s(\boldsymbol{x}) \ge \alpha_7 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\bar{\xi}_i} \ge \alpha_8 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\bar{\xi}_{max}} \ge \alpha_9 \|\boldsymbol{x}\|^{\bar{\xi}_{max}}.$$

Обозначим положительные числа

$$a = \frac{\alpha_3}{\alpha_5^{2/\xi_{min}}}, \qquad \xi = 2/\xi_{min} - 1, \qquad b = c^{-\xi}.$$

Оценим приращение функции $V_s(\boldsymbol{x})$ в силу подсистемы s для всех $s \in Q$, если $\boldsymbol{x}(k) \in G_1$:

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\alpha_3 \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -a V_s^{1+\xi}\big(\boldsymbol{x}(k)\big),$$

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) \le V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) - a V_s^{1+\xi}\big(\boldsymbol{x}(k)\big).$$

3.3. Оценки вне окрестности начала координат

При выполнении предположения 4 для любого $H > 0$ найдется такое $\alpha_{10} > \alpha_3$, что при всех $\|\boldsymbol{x}\| > H$ и $s \in Q$ выполняется

$$V_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \alpha_{10} \boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{x}),$$

а приращение функции $V_s(\boldsymbol{x})$ в силу подсистемы s для всех $s \in Q$ при $\|\boldsymbol{x}(k)\| > H$ удовлетворяет неравенствам

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\alpha_3 \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\frac{\alpha_3}{\alpha_{10}} V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big),$$

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) \le \left(1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_{10}}\right) V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big).$$

Обозначим

$$A = 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_{10}} \in (0,1).$$

3.4. Вспомогательные результаты

Для получения оценки решений системы (1) используем следующий результат, установленный в [30].

Лемма 1. Если для членов последовательности q_k выполнены неравенства $0 \le q_{k+1} \le q_k - \alpha q_k^{\lambda}$, $k \in \mathbb{M}$, где $\alpha > 0$, $\lambda > 1$, $q_0 \ge 0$, $\alpha \lambda q_0^{\lambda-1} \le 1$, то при всех $k \in \mathbb{M}$ справедлива оценка

$$q_k \le q_0 \left(1 + \alpha(\lambda - 1) q_0^{\lambda-1} k\right)^{-\frac{1}{\lambda-1}}.$$

Введем при $p, m \in \mathbb{N}$ обозначение

$$\psi(m,p) = \sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} b^{p-i}.$$

Лемма 2. Из выполнения условия $\psi(m,p) \to \infty$ следует выполнение условия $\chi(m,p) \to \infty$. Если условие $\psi(m,p) \to \infty$ выполняется равномерно по $m \in \mathbb{N}$, то условие $\chi(m,p) \to \infty$ также выполняется равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Выведем при $m, p \in \mathbb{N}$ рекуррентное соотношение для $\psi(m,p)$:

$$\psi(m,p+1) = b\left(\sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i}\, b^{p-i} + T_{m+p}\right) = b\left(\psi(m,p) + T_{m+p}\right).$$

Выразим из этого соотношения T_{m+p} и преобразуем полученное выражение:

$$T_{m+p} = b^{-1}\left(\psi(m,p+1) - \psi(m,p)\right) + (b^{-1} - 1)\psi(m,p).$$

С помощью полученного представления преобразуем и оценим снизу $\chi(m,p)$:

$$\chi(m,p) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} = \frac{1}{bp}\sum_{i=1}^{p-1}\left(\psi(m,i+1) - \psi(m,i)\right) + \frac{1-b}{bp}\sum_{i=1}^{p-1}\psi(m,i) =$$

$$= \frac{\psi(m,p)}{bp} + \frac{1-b}{bp}\sum_{i=1}^{p-1}\psi(m,i) \ge \frac{1-b}{bp}\sum_{i=1}^{p}\psi(m,i).$$

Пусть условие $\psi(m,p) \to \infty$ выполнено. Тогда для любого $M > 0$ можно выбрать $N > 0$ так, чтобы было $\psi(m,p) > M$ при $p \geq N$. Значит, при $p \geq 2N$

$$\psi(m,p) > \frac{1-b}{2b} M,$$

и условие $\chi(m,p) \to \infty$ выполняется. Если условие $\psi(m,p) \to \infty$ выполнено равномерно по $m \in \mathbb{N}$, то число N может быть выбрано независимо от m, следовательно, условие $\chi(m,p) \to \infty$ выполняется равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

3.5. Основные результаты

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2 и 4, и $\psi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $h \in (0, h_0)$.

Доказательство. Построим составную функцию Ляпунова $V_{\sigma(k)}(\boldsymbol{x})$ для системы (1). Зададим положительное число $\varepsilon \leq \min\{H_1, \dots, H_n\}$. Выберем начальный момент времени $k_0 \in \mathbb{M}$ и начальную точку $\boldsymbol{x}_0 \in G_1$, $0 < \|\boldsymbol{x}_0\| < \varepsilon$. Рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(k)$ системы (1), выходящее при $k = k_0$ из точки $\boldsymbol{x}_0$. Найдем такое натуральное число $m \in \mathbb{N}$, что $k_0 \in [\Theta_{m-1}, \Theta_m)$.

Для применения леммы 1 получим оценку

$$a(1+\xi)V^{\xi}_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0) \leq a(1+\xi)a_6^{\xi}\|\boldsymbol{x}_0\|^{\xi\xi_{min}} < a(1+\xi)a_6^{\xi}\varepsilon^{\xi\xi_{min}},$$

и будем считать число ε достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство

$$a(1+\xi)a_6^{\xi}\varepsilon^{\xi\xi_{min}} \leq 1.$$

Тогда, если $\|\boldsymbol{x}(k)\| < \varepsilon$ при $k \in [k_0, \Theta_m)$, то на этом промежутке справедливы оценки

$$V^{-\xi}_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \geq V^{-\xi}_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0) + a\xi(k-k_0).$$

Для каждого $k \geq \Theta_m$ можно указать такое натуральное число $p \in \mathbb{N}$, что $\Theta_{m+p-1} \leq k < \Theta_{m+p}$. При этом $p \to \infty$, когда $k \to \infty$. Рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(k)$ в течение некоторого промежутка времени $[k_0, k]$. Если $\|\boldsymbol{x}(\bar{k})\| < \varepsilon$ при

$k_0 \le \bar{k} \le k$, то, последовательно производя оценки на промежутках $[\Theta_{m+K-1}, k]$, $[\Theta_{m+K-2}, \Theta_{m+K-1}]$, …, $[k_0, \Theta_m]$, имеем

$$V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}^{-\xi}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \ge V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}^{-\xi}\Big(\boldsymbol{x}\big(\Theta_{m+p-1}\big)\Big) + a\xi\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) \ge$$

$$\ge bV_{\sigma(\Theta_{m+p-2})}^{-\xi}\Big(\boldsymbol{x}\big(\Theta_{m+p-1}\big)\Big) + a\xi\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) \ge \cdots \ge$$

$$\ge b^p V_{\sigma(\Theta_{m-1})}^{-\xi}(\boldsymbol{x}_0) + a\xi\Big(\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) + \psi(m,p) + b^p(\Theta_m - k_0)\Big).$$

Таким образом, при $k \in [k_0, \Theta_m)$ справедливы оценки

$$\|\boldsymbol{x}(k)\| \le \alpha_9^{-\frac{1}{\bar{\xi}_{max}}} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}^{\frac{1}{\bar{\xi}_{max}}}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le$$

$$\le \alpha_9^{-\frac{1}{\bar{\xi}_{max}}}\Big(\alpha_6^{-\xi}\|\boldsymbol{x_0}\|^{-\xi\xi_{min}} + a\xi(k-k_0)\Big)^{-\frac{1}{\xi\bar{\xi}_{max}}},$$

а при $\Theta_{m+p-1} \le k < \Theta_{m+p}$

$$\|\boldsymbol{x}(k)\| \le \alpha_9^{-\frac{1}{\bar{\xi}_{max}}}\Big(b^p\alpha_6^{-\xi}\|\boldsymbol{x_0}\|^{-\xi\xi_{min}} +$$

$$+ a\xi\Big(\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) + \psi(m,p) + b^p(\Theta_m - k_0)\Big)\Big)^{-\frac{1}{\xi\bar{\xi}_{max}}}.$$

По условию, $\psi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Тогда можно найти $\delta > 0$ так, что при всех $k_0 \in \mathbb{M}$, $k \ge k_0$ и $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ будет выполнено $\|\boldsymbol{x}(k)\| < \varepsilon$, и $\|\boldsymbol{x}(k)\| \to 0$ при $k - k_0 \to +\infty$ равномерно по $k_0 \in \mathbb{M}$ и $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$. Таким образом, нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Выберем число $0 < H < \delta$. По нему найдем число α_{10} из пункта «3.3. Оценки вне окрестности начала координат». Рассмотрим область

$$G_2 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| > H\}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{x}_0 \in G_2$. Если $\boldsymbol{x}(k) \in G_2$ при $k \in [k_0, \Theta_m)$, то на этом промежутке справедливы оценки

$$V_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le A^{k-k_0} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0).$$

Для каждого $k \ge \Theta_m$ можно указать такое натуральное число $p \in \mathbb{N}$, что $\Theta_{m+p-1} \le k < \Theta_{m+p}$. При этом $p \to \infty$, когда $k \to \infty$. Рассмотрим решение

$\boldsymbol{x}(k)$ в течение некоторого промежутка времени $[k_0, k]$. Если $\boldsymbol{x}(\bar{k}) \in G_2$ при $k_0 \le \bar{k} \le k$, то, последовательно производя оценки на промежутках $[\Theta_{m+K-1}, k]$, $[\Theta_{m+K-2}, \Theta_{m+K-1}]$, …, $[k_0, \Theta_m]$, имеем

$$V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le A^{k-\Theta_{m+p-1}} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\Theta_{m+p-1}\big) \le$$
$$\le cA^{k-\Theta_{m+p-1}} V_{\sigma(\Theta_{m+p-2})}\big(\Theta_{m+p-1}\big) \le \cdots \le c^p A^{k-k_0} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0).$$

При этом

$$k - k_0 = k - \Theta_{m+p-1} + p\chi(m,p) + \Theta_m - k_0.$$

Из условия $\psi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ с помощью леммы 2 получаем, что также $\chi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Левая часть неравенства $V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le c^p A^{k-k_0} V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0)$ положительна, а правая стремится к 0 при $p \to \infty$. Приходим к противоречию. Значит, в некоторый момент времени решение $\boldsymbol{x}(k)$ выйдет из области G_2. Следовательно, найдется такое $\bar{k} \ge k_0$, что $\|\boldsymbol{x}(\bar{k})\| \le H < \delta$. Тогда требуемое следует из доказательства равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

3.6. Пример

Рассмотрим пример системы (1), состоящей из двух подсистем. Пусть

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $c = 3$, и отрицательно определены матрицы

$$\boldsymbol{P}_1^T \boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_1 \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} -42 & 0 & 7 \\ 0 & -12 & 9 \\ 7 & 9 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_2^T \boldsymbol{\Lambda}_2 + \boldsymbol{\Lambda}_2 \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 10 \\ 0 & -36 & 20 \\ 10 & 20 & -20 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для гибридной системы не существует общей функции Ляпунова с матрицей

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

с положительными λ_1 и λ_2. Условия того, что определители матриц

$$\boldsymbol{P}_1^T\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{P}_1, \qquad \boldsymbol{P}_2^T\mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{P}_2$$

отрицательны, можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{48}{\lambda_1} + 3\lambda_1 + \dfrac{175}{\lambda_2} + 28\lambda_2 < 172, \\ \dfrac{2}{\lambda_1} + 18\lambda_1 + \dfrac{49}{\lambda_2} + \lambda_2 < 34. \end{cases}$$

После сложения этих неравенств получим противоречие:

$$\frac{50}{\lambda_1} + 21\lambda_1 + \frac{224}{\lambda_2} + 29\lambda_2 < 206,$$

$$\frac{50}{\lambda_1} + 21\lambda_1 \geq 10\sqrt{42}, \qquad \frac{224}{\lambda_2} + 29\lambda_2 \geq 8\sqrt{406}.$$

Пусть переключения подсистем происходят так, что

$$T_i = \begin{cases} i, & i = 1,3,5,\dots; \\ 1, & i = 2,4,6,\dots. \end{cases}$$

Тогда при $p \geq 3$ выполнено

$$\psi(m,p) = \sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} b^{p-i} \geq T_{m+p-2} b^2 + T_{m+p-1} b >$$

$$> \left(T_{m+p-2} + T_{m+p-1}\right) b^2 \geq (m+p-2) b^2 \geq (p-1) b^2.$$

Пусть при $i \in I = \{1,2\}$ нелинейности в правых частях системы (1) имеют вид

$$f_i(x_i) = \frac{x_i^{\sigma_i}}{1 + x_i^{\sigma_i - 1}},$$

где $\sigma_i > 1$ – рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $H_i = 1, \gamma_i = \hat{\gamma}_i = 0{,}5$. Тогда выполнены условия теоремы 2, и нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Глава 4. Системы с насыщением

В данной главе используем все предположения из главы 1 и следующее дополнительное предположение о правых частях уравнений (2). Предположим, что нелинейности при достаточно больших по модулю значениях переменных состояния испытывают насыщение, удерживая постоянные значения. Такие системы используются для моделирования многих систем управления [31, 32].

4.1. Предположение

Предположение 5. Пусть существуют положительные числа $\bar{\beta}_i, \bar{\xi}_i$, β_i, $\xi_i < 2$ и H_i, при которых функции $f_i(x_i)$ при $i \in I$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\bar{\beta}_i |x_i|^{\bar{\xi}_i} \leq \int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \leq \beta_i |f_i(x_i)|^{\xi_i}, \qquad |x_i| \leq H_i, \\ f_i(x_i) = f_i(H_i), \qquad x_i > H_i, \\ f_i(x_i) = f_i(-H_i), \qquad x_i < -H_i. \end{gathered} \tag{4}$$

В частности, предположение 5 будет выполнено, если существуют такие положительные числа H_i, γ_i и $\sigma_i > 1$, что функции $f_i(x_i)$ монотонно возрастают при $|x_i| \leq H_i$, удовлетворяют условиям (4) и

$$|f_i(x_i)| \geq \gamma_i |x_i|^{\sigma_i}, \qquad |x_i| \leq H_i, \qquad i \in I.$$

Тогда при $|x_i| \leq H_i$, $i \in I$, справедливо

$$\frac{\gamma_i}{1+\sigma_i} |x_i|^{1+\sigma_i} \leq \int\limits_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \leq \frac{|f_i(x_i)|^{1+\frac{1}{\sigma_i}}}{\gamma_i^{\frac{1}{\sigma_i}}}.$$

4.2. Оценки вне окрестности начала координат

При выполнении предположения 5 для любого $H > 0$ найдутся такие положительные α_{10} и α_{11}, что при всех $\|\boldsymbol{x}\| > H$ и $s \in Q$ выполняется

$$V_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(s)} \int_0^{x_i} f_i(\tau)\, d\tau \le \alpha_{10} \|\boldsymbol{x}\|,$$

а приращение функции $V_s(\boldsymbol{x})$ в силу подсистемы s для всех $s \in Q$ при $\|\boldsymbol{x}(k)\| > H$ удовлетворяет неравенствам

$$V_s\big(\boldsymbol{x}(k+1)\big) - V_s\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\alpha_3 \boldsymbol{f}^2\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le -\alpha_3 \alpha_{11}.$$

4.3. Результаты

Введем при $p, m \in \mathbb{N}$ обозначение

$$\varphi(m,p) = \sum_{i=1}^{p-1} T_{m+i} c^{-i}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1, 2 и 5, соотношение $\psi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ имеет место равномерно по отношению к $m \in \mathbb{N}$, и $\varphi(1,p) \to \infty$ при $p \to \infty$. Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $h \in (0, h_0)$.

Доказательство. Доказательство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) проводится как в главе 3. Зададим положительное число ε. Найдем по нему число $\delta > 0$ так, что если $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$, то для любых $k_0 \in \mathbb{M}$ выполнено $\|\boldsymbol{x}(k)\| < \varepsilon$ при всех $k \ge k_0$, $k \in \mathbb{M}$, и $\|\boldsymbol{x}(k)\| \to 0$ при $k - k_0 \to +\infty$ равномерно по $k_0 \in \mathbb{M}$ и $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$.

Выберем число $0 < H < \delta$. По нему найдем числа α_{10} и α_{11} из пункта «4.2. Оценки вне окрестности начала координат». Рассмотрим область

$$G_2 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| > H\}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in G_2$. Если $\boldsymbol{x}(k) \in G_2$ при $k \in [k_0, \Theta_m)$, то на этом промежутке справедливы оценки

$$V_{\sigma(\Theta_{m-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \le V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0) - \alpha_3 \alpha_{11}(k - k_0) \le \alpha_{10}\|\boldsymbol{x}_0\| - \alpha_3\alpha_{11}(k - k_0).$$

Для каждого $k \ge \Theta_m$ можно указать такое натуральное число $p \in \mathbb{N}$, что $\Theta_{m+p-1} \le k < \Theta_{m+p}$. При этом $p \to \infty$, когда $k \to \infty$. Рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(k)$ в течение некоторого промежутка времени $[k_0, k]$. Если $\boldsymbol{x}\big(\bar{k}\big) \in G_2$ при

$k_0 \leq \bar{k} \leq k$, то, последовательно производя оценки на промежутках $[\Theta_{m+K-1}, k]$, $[\Theta_{m+K-2}, \Theta_{m+K-1}]$, …, $[k_0, \Theta_m]$, имеем

$$V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}\big(\boldsymbol{x}(k)\big) \leq V_{\sigma(\Theta_{m+p-1})}\Big(\boldsymbol{x}\big(\Theta_{m+p-1}\big)\Big) - \alpha_3\alpha_{11}\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) \leq$$

$$\leq cV_{\sigma(\Theta_{m+p-2})}\Big(\boldsymbol{x}\big(\Theta_{m+p-1}\big)\Big) - \alpha_3\alpha_{11}\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) \leq \cdots \leq$$

$$\leq c^p V_{\sigma(\Theta_{m-1})}(\boldsymbol{x}_0) - \alpha_3\alpha_{11}\Big(\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) + c^p\varphi(m,p) + c^p(\Theta_m - k_0)\Big) \leq$$

$$\leq \alpha_{10}c^p\|\boldsymbol{x}_0\| - \alpha_3\alpha_{11}\Big(\big(k - \Theta_{m+p-1}\big) + c^p\varphi(m,p) + c^p(\Theta_m - k_0)\Big).$$

Так как $\varphi(1,p) \to \infty$ при $p \to \infty$, то $\varphi(m,p) \to \infty$ при $p \to \infty$ при всех $m \in \mathbb{N}$ [18]. Таким образом, левая часть полученной цепочки неравенств положительна, а правая стремится к $-\infty$ при $p \to \infty$. Приходим к противоречию. Значит, в некоторый момент времени решение $\boldsymbol{x}(k)$ выйдет из области G_2. Следовательно, найдется такое $\bar{k} \geq k_0$, что $\|\boldsymbol{x}(\bar{k})\| \leq H < \delta$. Тогда требуемое следует из доказательства равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1).

Выводы

Получены три вида достаточных условий асимптотической устойчивости в целом нулевого решения рассмотренных систем. Таким образом, поставленная задача с помощью метода функций Ляпунова полностью решена.

Дополнительные условия, накладываемые на закон переключения, для систем с насыщениями, рассмотренными в главе 4, включают в себя соответствующие условия для систем из главы 3, из которых, в свою очередь, следуют соответствующие условия для систем из главы 2. При этом в главе 2 использованы более жесткие условия на нелинейности в правых частях рассматриваемых систем, чем в главе 3, что приближает системы из главы 2 к линейным.

Заключение

В работе на основе прямого метода Ляпунова выведены достаточные условия равномерной асимптотический устойчивости в целом решений рассмотренного класса нелинейных разностных систем с переключениями. При этом асимптотическая устойчивость имеет глобальный характер и обеспечивается с помощью наложения ограничений на закон переключения.

Разработанные подходы могут применяться в задачах анализа и синтеза систем автоматического регулирования. Полученные результаты могут быть распространены на другие классы систем. В перспективе возможно рассмотрение разностных систем с запаздыванием и переключениями.

Список литературы

1. Зубов В. И. Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение, 1980. 253 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем / пер. с рум. М. И. Букатаря и Г. В. Ножака; под ред. В. П. Рубаника. М.: Мир, 1971. 310 с.
3. Видаль П. Нелинейные импульсные системы / пер. с франц. Б. Ю. Мандровского-Соколова; под ред. В. М. Кунцевича. М.: Энергия, 1974. 336 с.
4. Kazkurewicz E., Bhaya A. Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhäuser, 1999.
5. Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V., Zhang. Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems // J. of Difference Equations and Applications, 2012. Vol. 18, No. 9. P. 1545–1561.
6. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 324 с.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
8. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / пер. с англ. А. Ю. Захарова, И. А. Кульчицкой, С. С. Филлипова; под ред. А. А. Самарского. М.: Мир, 1988. 334 с.
9. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V. Ultimate boundedness conditions for a hybrid model of population dynamics // Proc. 21st Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED’2013), Platanias–Chania, Crite, Greece, 2013. P. 622–627.
10. Decarlo R. A., Branicky M. S., Pettersson S., Lennartson B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems // Proc. IEEE, 2000. Vol. 88, No. 7. P. 1069–1082.

11. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Boston: Birkhäuser, 2003.
12. Provotorov V. V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // Proc. of the IEEE Intern. Conf. “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), St. Petersburg, Russia, 2015. P. 126–128.
13. Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf. K., King G. Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev, 2007. Vol. 49, No. 4. P. 545–592.
14. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., Platonov A. V. On the asymptotic stability of switched homogeneous systems // Systems Control Lett, 2012. Vol. 61, No. 1. P. 127–133.
15. Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1998. Vol. 43, No. 4. P. 475–482.
16. Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N. Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems // J. of the Franklin Institute, 2001. Vol. 338. P. 765–779.
17. Michel A. N., Hou L. Stability results involving time-averaged Lyapunov function derivatives // Nonlinear Analysis. Hybrid Systems, 2009. Vol. 3. P. 51–64.
18. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V., Voloshin M. V. On the Global Asymptotic Stability of a Class of Nonlinear Switched Systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2017. Vol. 17, No. 2. P. 107–120,
19. Letov A. M. Stability in Nonlinear Control Systems. Princeton: Princeton University Press, 1961.
20. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.. Asymptotic stability conditions and estimates of solutions for nonlinear multiconnected timedelay systems // Circuits, Systems, and Signal Proc., 2016. Vol. 35. P. 3531–3554.
21. Hopfield J. J., Tank D. W. Computing with neural circuits: a model // Science, 1986. Vol. 233, No. 4764. P. 625–633.
22. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / пер. с англ.; под ред. В. В. Румянцева. М.: Мир, 1980. 300 с.

23. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
24. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959. 324 с.
25. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. 223 p.
26. Александров А. Ю., Платонов А. В. Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // АиТ, 2008. № 7. С. 1101–1116.
27. Александров А. Ю., Платонов А. В. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // АиТ, 2016. Вып. 5. С. 37–49.
28. Kamenetskiy V. A., Pyatnitskiy Ye. S. An iterative method of Lyapunov function construction for differential inclusions // Systems Control Lett., 1987. Vol. 8, No. 5. P. 445–451.
29. Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
30. Александров А. Ю., Жабко А. П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем // Сиб. мат. журн., 2003. Т. 44, № 6. С. 1217–1225.
31. Hu T., Lin Z. Control systems with actuator saturation: Analysis and design. Boston: Birkhäuser, 2001. 392 p.
32. Kapila V., Grigoriadis K. M. Actuator saturation control. New York: Marcel Dekker Inc, 2002. 320 p.